

# HER DOĞAL SAYI İLGİNÇTİR!



## Bir Matematikçi ve Bir Dahi

“Putney’deki bir hastanede ölüm döşeğinde yatarken Hardy, Ramanujan’ı ziyarete giderdi. Taksi plaka numarasıyla ilgili olay, bu ziyaretlerin birinde gerçekleşti. Hardy o gün de her zamanki ulaşım aracı olan taksiyle gitmişti. Ramanujan’ın yattığı odaya girdi. Hardy konuşmaya başlamakta her zamanki beceriksizliğiyle, muhtemelen daha selamlaşmadan ve mutlaka ilk cümle olarak ‘Geldiğim taksinin numarası 1729’du. Bana çok alelade bir sayı gibi geldi’ dedi. Ramanujan’ın buna yanıtı şu oldu: “Hayır Hardy! Hayır Hardy! Çok ilginç bir sayı. İki küpün toplamı olarak iki ayrı şekilde ifade edilebilen en küçük sayı.” (G. H. Hardy, Bir Matematikçinin Savunması, s. 24, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları)

İngiliz matematikçi G.H. Hardy ile, kendisine, matematiksel çalışmalarını içeren bir mektupla ulaşan Ramanujan

isimli Hintli bir dahi arasında geçen bu diyalog 1729 ( $= 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ ) sayısının *ilginç* olduğuna dair bir örnek. Ama yalnızca 1729 sayısı değil, tüm doğal sayılar ilginç. Üstelik bu öylesine söylenmiş bir cümle değil; bir teorem, yani ispatı olan bir ifade!

## İlginç

İlginç sözcüğüyle bu kadar ilgilenince, bir tanım gerektirmesi oldukça beklendik bir durum. Ama bir süre sonra kendiliğinden ortaya çıkacağı için tanımlamak aslında gereksiz. 1729 örneğinin üzerine, şimdilik şunun farkındayız ki ilginç olan en az bir doğal sayı var. Diyelim ki ilginç olanların yanısıra olmayan doğal sayılar da var. Bu kümenin, doğal sayıların alt kümesi olmasından dolayı en küçük elemanı vardır (bu, doğal sayıların her alt kümesi için varolan bir özellik!). Bu elemanı ‘k’ ile ifade edelim. k sayısı ‘ilginç olmayan en küçük sayı’ olduğu için *ilginç* bir sa-

yı olacaktır ve bu özelliğiyle ilginç olan sayılar arasına girecektir. Bu durum bir çelişkiye yol açacaktır. Bu böyle devam edeceğinden ilginç olmayan doğal sayıların mevcut olmadığı, yani her doğal sayının ilginç olduğu ispatlanmış olacaktır. Peki ya bir sayı hangi özelliğinden dolayı ilginç olarak ilan edilir? Bu sorunun tek bir cevabı yok elbette. Bir sayının ilginç olmak için pek çok nedeni olabilir.

Matematik tarihinin başlangıcından günümüze kadar sayılara pek çok özellik yüklenmiş, üstelik bu özelliklerin birçoğu da rastlantıyla bulunmuş. Bir sayı ile farkedilip tanımlanan özellik, beraberinde önce ona uyan diğer sayıları aramaya ve ardından da bu tür sayıların davranışlarını (doğal sayılar içindeki dağılımlarını) incelemeye itmiş matematikçileri.

Meraklılar, ilk 9999 sayının neden ilginç olduğuna dair bir listeyi <http://www.stetson.edu/~efriedma/numbers.html> adresinde bulabilir-

ler. Bu listeden sizin için birkaç örnek seçtik. Eğer aralardaki boşlukları doldurmayı denerseniz şunu aklımızdan çıkarmayın: bir doğal sayıyı ilginç yapan, birden fazla neden olabilir.

- 0: toplamada etkisiz eleman
- 1: çarpmada etkisiz eleman
- 2: tek çift asal
- 3: içinde yaşadığımız uzayın boyut sayısı
- 6: en küçük mükemmel sayı
- 10: kullandığımız sayı sisteminin tabanı
- 18: basamaklarının toplamının 2 katı olan tek sayı
- 28: ikinci mükemmel sayı
- 31: Mersenne asalı
- 42: beşinci Catalan Sayısı
- 45: bir Kaprekar sayısı
- 67: 5 ve 6 tabanındaki en küçük Palindromik sayı
- 94: bir Smith sayısı
- 145:  $1! + 4! + 5!$
- 151: bir palindromik asal sayı
- 175:  $1^1 + 7^2 + 5^3$
- 198:  $11 + 99 + 88$ .
- 220: en küçük dost sayı
- 227: Fermat asalı
- 347: bir Friedman sayısı
- 3413:  $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$

Bu listede geçen ve *ilginç* olarak anılan Friedman, palindromik, Kaprekar, Mersenne, Smith gibi özellikleri tanımladığımızda 'ilginç' kelimesinin sırrı kendiliğinden çözülecek.

## Smith Sayıları

1982 yılında, matematikçi Albert Wilansky, üvey kardeşi H. Smith'i ararken çevirdiği telefon numarasının (493-7775) *ilginç* bir özelliğe sahip olduğunu farketti. Telefon numarasının basamaklarının sayı değerlerinin toplamı, yine aynı numaranın tüm asal çarpanlarının sayı değerlerinin toplamına eşitti:

$$\begin{aligned} & \text{asal çarpanlar:} \\ & 4937775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65837 \\ & \text{sayı değerleri toplamı:} \\ & 4+9+3+7+7+7+5 = 3+5+5+6+5+8+3+7 \end{aligned}$$

Farkettiği bulgu karşısında hayrete düşen Wilansky bu buluşunu, telefon ettiği üvey kardeşine ithaf ederek bu ve bu tür sayıları Smith sayıları olarak adlandırdı. İlk bakışta 4937775 gibi 7 basamaklı bir sayının asal çarpanlarını bulmak ve adı geçen özelliği farkedebilmek için aranızın sayılarla bir hayli iyi olması gerekiyor olsa da, her asalın Smith sayısı özelliğini taşıdığını farketmek için bu kadar yetenekli olmaya gerek yok. Çünkü zaten asal sayının asal çarpanı kendisidir ve sayı değerleri toplamı eşitliği doğal bir sonuçtur. Bu

nedenle Wilansky, asal sayıları bir Smith sayısı olarak saymamış ve tanımlı bu yönde yapmıştı.

Asal sayı tanımı yapıldıktan sonra insanoğlunun ilk olarak peşinde koştuğu sorulardan biri, asalların sonsuz tane olup olmadığıydı. Burada, tarih tekrerrürden ibarettir deyimini kullanmak yerinde olur belki de. Smith sayılarının sonsuz tane olduğunun ispatı 5 yıl sonra, 1987'de Mc. Daniel tarafından yapıldı.

## Kaprekar Sayıları

Hint matematikçi D. R. Kaprekar 1949'da şöyle bir gözlem yaptı: Öyle bir n basamaklı t sayısı olsun ki bu sayının karesini alıp ( $t^2$ ) sağdaki n basamağı solda kalan n veya n-1 basamağa ekleyince sonuç yine t sayısını versin. Bu özelliği sağlayan sayılar da Kaprekar sayıları olarak adlandırılıyor. İlk örnek olarak listemizde yer alan 45 sayısını inceleyelim:

45, 2 basamaklı bir sayı  
 $45^2 = 2025$  sağdan 2 basamak 25, soldan 2 basamak 20. Bu ikisinin toplamı da  $20 + 25 = 45$  yani sayının kendisi. Diğer bir örnek  $17344^2 = 300814336$ , sağdan 5 basamak ve kalan 4 basamağın toplamı:  $3008 + 14336 = 17344$ . Gerçekten *ilginç* değil mi?

Hazır Kaprekar sayılarından söz açmışken bu sayılarla pek ilgisi olmayan, ama adını yine aynı kaynaktan alan Kaprekar sabitinden bahsetmeden geçmek olmaz.

## Bir Sayı Tut

Bir sayı tutmakla başladığımız oyunlar hep *ilginç* bir sona ulaştırır bizi; hesaplarda bir hata yapmazsak tabii. Önce 4 basamaklı bir sayı turalım: 4564.

Sonra onu basamaklarının sayı değerlerinin artış ve azalışına göre sıralayıp yeni iki sayı üretelim: 6544 ve 4456  
Şimdi büyükten küçüğü çıkaralım:  $6544 - 4456 = 2088$

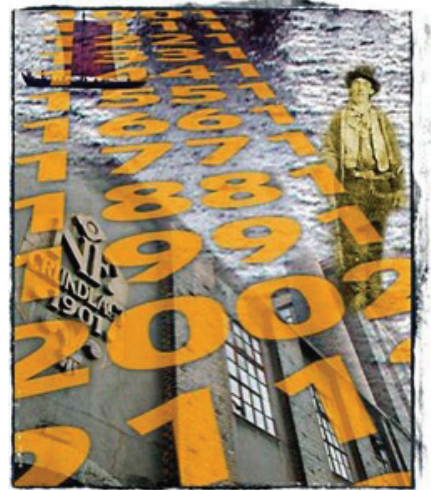
Aynı işlemleri çıkan sayı için de tekrarlayalım:  $8820 - 0288 = 8532$

Ve yine:  $8532 - 2358 = 6174$

Son bir deneme:  $7641 - 1467 = 6174$   
Kaprekar sabiti 6174 olarak bilinir. Herhangi 4 basamaklı bir sayı için bu işlemler serisini (en fazla 7 kez) yaptığınızda ya 0 sonucuna ya da 6174 sonu-

cuna ulaşır kısır bir döngüye girersiniz. Kaprekar'ın 1949'da yaptığı bu gözlemden sonra matematikçilerin neyin peşinden koştuğunu tahmin etmek artık zor değil. 4 basamaklı sayılar haricindekiler için bu işlemler serisi nasıl sonuç veriyor? Bunun yanıtı şöyle: Sonuç ya 0 oluyor, ya sabit bir sayıya ulaşılıyor ya da kısır bir döngüye giriliyor. Örneğin 6 basamaklılar için 549945 sabit sayısına ulaşılıyor ama 5 basamaklılar için birden fazla sabit mevcut. Bunların yanısıra kaç basamaklı bir sayı için en fazla kaç işlem yapıldığı da araştırmaların merak konusu.

## Palindromik Sayılar



Kapak, kütük, sus, yay, kepek sözcükleri *ilginç* bir ortak özelliklere dikkat çekiyor: Düzen ve tersten okunduğunda aynılar. Onlar ilginç olur da aynı özelliği taşıyan sayılar ilginç olmaz mı? Palindromik bir sayı düzen ve tersten okunduğunda aynı olan sayılardır:

1991, 10001, 12621, 79388397.  
Cebirsel operasyonlarla palindromik sayıları üretebilme meselesi de bu kavramın merak uyandıran konularından biri. Bu yollardan biri, herhangi bir sayıyı düzen ve tersten yazıp palindrom üretene kadar toplamak:  
 $13 + 31 = 44$ ;  
 $129 + 921 = 1050$  tekrar:  $1050 + 501 = 1551$

Şirin görüntüleriyle zararsız görünen bu sayıların sizi çıldırtan bir probleme dönüşmesi mümkün mü dersiniz?

Örneğin 98'i bir palindrom yapmak için bu toplama işlemlerini 24 kez devam ettirmeniz gerekecektir. Olur ya, palindrom yapmak için 196 sayısını

seçtiniz. O zaman ömrünüzü harcamanız gerekebilir! Halbuki 196'ya varana kadar tüm sayılar kolayca palindrom oluyor. Bugüne kadar milyonlarca işlem uygulanmış olan (bilgisayarlar sağolsun) 196'nın bir palindrom olmaya niyeti yok gibi gözüküyor. 196 gibi davranan başka sayılar da mevcut. Şimdilik her sayının palindrom üretebileceği ya da üreteceği meselesi, bir ispata kavuşmuş değil.

## Ve Diğerleri

Burada daha fazla ilginç sayı türünden bahsetmek isterdik ama Fer-

mat'nın da dediği gibi "sayfada yer kalmadı!". Yine de bahsettiğimiz diğer türlerin tanımlarını verebiliriz:

Bir sayıyı kendi basamakları ve cebirsel operasyonları kullanarak tekrar elde edebiliyorsak, bunlara Friedman sayıları diyoruz.

Örneğin:

$$1827 = 21 \times 87; 2503 = 50^2 + 3; 625 = 5^{6^2}$$

Mersenne sayılarıysa ( $n$  doğal sayı olmak üzere)  $2^n - 1$  şeklinde yazılabilen sayılar.

Tüm bu tanımları yaptıktan sonra matematikçiler ilk gözağrılarını olan asal sayıları asla unutmuyorlar ve tanımları içiçe geçirmeye başlıyorlar: 'Mersenne

Asal', 'Kaprekar Asal', Palindromik Asal' ve tabii onların sonsuz tane olup olmadığı soruları izliyor. *İlginç* değil mi?

## Peki İlginç Ne?

*İlginç* derken ne kastedildiğine ilişkin kafanızda biraz ışık yakabilirdiyseniz bu kavramın tanımını yapmayı deneyin. Bildiğiniz birşeyi sözcükleredökmenin her zaman çok kolay olmadığına bir kez daha tanık olacaksınız!

Nilüfer Karadağ

Kaynakça: <http://www.uweb.ucsb.edu/~cooldw57/math.htm>

# Bir Buluşum Var

Aşağıdaki özellikleri ÖSS'ye çalışan arkadaşlarım bulmuştur.

1. İki sayı olsun, birinci sayının  $x$  sayısına bölümünden kalan  $a$ ; ikinci sayının  $x$  sayısına bölümünden kalan  $b$  olsun; iki sayının arasındaki farkın  $x$  sayısına bölümünden kalan  $c$  olsun:

$|a-b| = c$  dir.

**örnek:**

$$125/8 \rightarrow \text{bölüm} 15 \text{ kalan} 5 \text{ (1. kalan a)}$$

$$238/8 \rightarrow \text{bölüm} 29 \text{ kalan} 6 \text{ (2. kalan b)}$$

$$238 - 125 = 113$$

$$113/8 \rightarrow \text{bölüm} 14 \text{ kalan} 1 \text{ (3. kalan c)}$$

$$|a-c| = c, |5-1| = 4$$

2. Sonu 5 ile biten bir sayının karesini kısa yoldan hesaplamak için:  $abc\dots5 \times abc\dots5 = [abc\dots \times (a+1)bc\dots] \dots 25$

**örnek:**

$35 \times 35 = 1225$  yani birinci sayımız 3, için bir fazlası 4. Bu iki sayıyı çarpıp son iki basamağa 25 yazıyoruz.  $3 \times 4 \dots 25 = 1225$

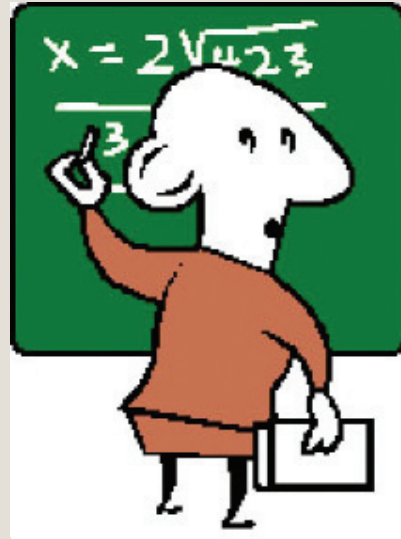
**örnek:**

$155 \times 155 = 24025$  yani  $15 \times 16 \dots 25$  yani 240 ve 25 yanyana, yani 24025

**örnek:**  $31285 \times 31285 = 3128 \times 3129 \dots 25$ , yani 978751225. Umarım yeterince izah edebilmişimdir.

Saygılarımla,

tuplarda "ÖSS için çalışırken şöyle bir buluş yaptım" şeklinde başlayanlar oldukça fazla. Üniversite giriş sınavı hazırlığı oldukça yoğun ve uzun bir süreç olduğundan arkadaşlarımız ister istemez pratik yöntemler üretip ufak buluşlar yapıyor. Bu yolda çalışmaya başlayan herkese başarılar diliyoruz.



Birinci buluşumuz, kalan algoritmasıyla ilgili. Aslında bu algoritma oldukça eski. Üstelik sadece çıkarmada değil, toplama ve çarpmada da geçerli. Arkadaşımızın önerdiği gibi iki sayı olsun ve birinci sayının  $x$  sayısına bölümünden kalan  $a$ , ikinci sayının  $x$  sayısına bölümünden kalan  $b$  olsun (doğal sayılarla çalıştığımızı ve bölen  $x$  sayısının 0'dan farklı olduğunu söyle-

mekte de fayda var). Bu iki sayının toplamı, çarpımı ya da farkı (mutlak değeri) sayıların ayrı ayrı bölünmesi ile kalan sayıların, sırasıyla, toplamı, çarpımı ya da farkı olacaktır. Şayet bu sayılar  $x$ 'den büyükse sayı tekrar bölünür. Arkadaşımızın örneği üzerinde çalışalım:

$$125/8 \rightarrow \text{bölüm} 15 \text{ kalan} 5 \text{ (1. kalan a)}$$

$$238/8 \rightarrow \text{bölüm} 29 \text{ kalan} 6 \text{ (2. kalan b)}$$

$$\gt 238 + 125 = 363$$

$$363/8 \rightarrow \text{kalan} 3$$

$5+6=11$ ; 8'den büyük olduğu için bu sayının da 8'e bölümünden kalana bakarız.

$$11/8 \rightarrow \text{kalan} 3$$

$$\gt 238 \times 125 = 29750$$

$$29744/8 \rightarrow \text{kalan} 6$$

$$5 \times 6 = 30;$$

$$30/8 \rightarrow \text{kalan} 6$$

Burak arkadaşımızın gönderdiği ikinci kısayol da bilinen bir yol. Önerilen yol özellikle 2 basamaklı ve sonu 5 ile biten sayılar için verimli. Daha yüksek basamaklı sayılar için kullanırsak, yine kalabalık sayıları çarpmakla uğraşyoruz. Kare alma ve çarpma işlemleri için üretilmiş pek çok kısa yol mevcut. Bir kaçını [http://andylama.com/mike/math\\_shortcuts.htm](http://andylama.com/mike/math_shortcuts.htm) sayfasında bulabilirsiniz.

Nilüfer Karadağ

[karadagnilufer@yahoo.com](mailto:karadagnilufer@yahoo.com)

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,  
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,  
Atatürk Bulvarı No:221  
Kavaklıdere-ANKARA